### 6. Critére de Convergence Uniforme d'une série de fonction

Donnons tout d'abord une condition nécessaire de CV Simple et Uniforme d'une série :

**Proposition 3.4**

Soit $(f_n(x))_n$ une suite de fonction définie sur $I$ Si la série $\sum_n f_n(x)$ converge **simplement** (resp. **uniformément**) sur $I$, alors la suite $(f_n(x))_n$ converge **simplement** (resp. **uniformément**) sur $I$ vers la fonction nulle.

**Preuve**

On a $\sum_n f_n(x)$ converge uniformément alors $\exists$ une fonction $S$ tq.

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in I} |S_n(x) - S(x)| = 0$$

avec

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$$

On a aussi , $\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \forall x \in I$

$$f_n(x) = S_n(x) - S_{n-1}(x)$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in I}|f_n(x)| &= \sup_{x\in I}|S_n(x) - S_{n-1}(x)| \\
&= \sup_{x\in I}|S_n(x) - S(x) + S(x) - S_{n-1}(x)| \\
&\leq \sup_{x\in I}|S_n(x) - S(x)| + \sup_{x\in I}|S_{n-1}(x) - S(x)|
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
0 \leq \lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in I}|f_n(x)| &\leq \lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in I}|S_n(x) - S(x)| + \lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in I}|S_{n-1}(x) - S(x)| \\
&= 0 + 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad \lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in I}|f_n(x)| = 0$$

D'où la suite de fonction $(f_n(x))_n$ converge uniformément vers 0
$\square$
Nous donnons **deux Critére de Convergence Uniforme**

**Théorème 0**

**Critére de weierstrass**
Soit $(f_n)_n$ une suite de fonction définie sur $I$, Supposons que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in I, \qquad |f_n(x)| \leq a_n$$

Où $a_n$ est le terme général d'une **Série convergente** ( i.e $\sum_n a_n$ est une série numérique CV).
alors la série $\sum_n f_n(x)$ converge normalement et donc converge uniformément sur $I$.

**Preuve**

On a ,$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in I,$

$$|f_n(x)| \leq a_n \Rightarrow \sup_{x\in I}|f_n(x)| \leq a_n$$

par le Théoréme de Comparaison, on a puisque $\sum_n a_n$ CV alors la série $\sup_{x\in I}|f_n(x)|$ converge aussi .
$\Leftrightarrow \quad \sum_n f_n(x)$ converge normalement
$\Rightarrow \quad \sum_n f_n(x)$ converge uniformément. $\square$

**Exemple 3.7**

Soit $(f_n(x))_n$ la suite de fonction définie par :

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^3 + x^2}$$

On a $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{n^3 + x^2} \leq \frac{1}{n^3} = a_n$$

(car $\forall x \in \mathbb{R} \qquad |\sin(nx)| \leq 1$)
puisque la série $\sum_{n\geq 1} a_n = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^3}$ est une série de Rieman CV alors par Critere de weierstrass la série de fonction $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ CV normalement et donc CV Uniformément.

**Rq** : Le Critére de weierstrass est un critére de convergence absolue.Pour les séries qui ne converge pas absolument, on a le critére d'Abel suivant :

**Théorème 0**

**Critére d'Abel**
Soit $(a_n)_n$ une suite de fonction positive décroissante converge uniformément vers 0. et soit $(b_n)_n$ suite de fonction tq :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in I, \quad |\sum_{k=0}^{n} b_k(x)| \leq M$$

(la suite de sommes partiells de $(b_n)$ bonnée independament de $n$ et de $n$ )
Alors la série de fonction $\sum_n a_n(x).b_n(x)$ converge uniformément sur $I$

**Rq : La preuve est basée sur le critére g'Abel pour les séries numeriques**

**Corollaire 1**

Soit $n \in \mathbb{N}. \quad h_n = (-1)^n f_n$ où $f_n$ est une suite de fonctions de $I$ dans $\mathbb{R}$.
On suppose

1. $\forall x \in I$, la suite $(f_n(x))_n$ est décroissante par rapport à $n$
2. La suite $(f_n(x))_n$ converge uniformément vers 0 sut $I$.

Alors la série de fonctions $\sum_n h_n(x)$ converge uniformément sur $I$.

**Exemple 3.8**

Soit
$$h_n(x) = \frac{(-1)^n}{n^x} \qquad x \in [1,+\infty]$$
La série de fonctions $\sum_n h_n(x)$ converge uniformément sur $[1,+\infty]$

$\forall x \geq 1, \quad f_n(x) = \frac{1}{n^x}$, La suite $(f_n(x))_n$ est décroissante
$$\frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n} \Rightarrow f_n \overset{C.U}{\to} 0 \qquad \text{sur}[1,+\infty]$$

## 2 2 Théorémes Fondamentaux sur les séries de fonctions

### 1. Théoréme de Continuité

**Théorème 0**

Soit $\sum_n f_n(x)$ une suite de fonction tq la suite de fonction $(f_n)n$ est continue. Si $\sum_n f_n(x)$ Converge Uniformément vers sa somme $S(x)$, alors la fonction $S$ est continue.

**Preuve**

On a la série $\sum_n f_n(x)$ CV uniformément vers $S(x)$ .
On a de plus la suite de fonction $(S_n)n$ est continue car $(S_n)n$ est une somme des fonctions continues $x \mapsto f_n(x)$.
par théoréme de continuité pour les suites de fonctions, on a $\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = S(x)$ est une fonction continue. ■

Le Théoréme de continuite se traduit comme suit :
Soit $x_0 \in I$ on a $S$ est continue en $x_0$ C à d.
$$\lim_{x\to x_0} S_n(x) = S(x_0)$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\lim_{x\to x_0} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x_0) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x)$$
Donc, dans les conditions du Théoréme de continuité, on peut Intervertir la limite et la somme infinie ie :
$$\lim_{x\to x_0} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x)$$

### 2. Théoréme d'integration

**Théorème 0**

Soit $\sum_n f_n(x)$ une série de fonctions Convergent Uniformément vers sa somme $S(x)$ sur $I = [a,b]$, et $\forall n \in \mathbb{N}, \qquad x \mapsto f_n(x)$ sont continues sur $I$ alors :

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)dt = \int_a^b S(t)dt$
2. La série de fonction $\sum_n V_n(x)$ où $V_n(x) = \int_a^x f_n(t)dt$ converge uniformément sur $I$ vers $\int_a^b S(t)dt$

**Preuve**

1- On a série de fonctions $\sum_n f_n(x)$ Convergent Uniformément vers sa somme $S(x)$ $\Leftrightarrow$ $(S_n(x)$ Converge Uniformément vers $S$ sur $I$ de plus les fonctions $(S_n(x))_n$ sont continues.
Par le Théoréme d'integration pour les suites de fonctios, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b S_n(t)dt = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} S_n(t)dt = \int_a^b S(t)dt$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b \sum_{k=0}^{n} f_k(t)dt = \boxed{\lim_{n\to+\infty} \textstyle\sum_{k=0}^{n}\int_a^b f_k(t)dt = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)dt = \int_a^b S(t)dt \quad (**)}$$

(<u>Rq :</u> l'integral est lineaire)

On a alors la série $\sum_n \int_a^x f_n(t)dt$ est une série CV si la suite des sommes partielles associée $W_n = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_a^b f_k(t)dt$ converge vers une limite finie $\int_a^b \underbrace{S(t)}_{\text{continue sur un compact [a,b]}} dt$
D'où

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\int_a^b f_k(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_a^b f_n(t)dt$$

Par (**) on a alors

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}\int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)dt = \int_a^b S(t)dt}$$

**Remarque 3.9**

1- Dans les conditions du Théoréme d'integration, on peut Intervertir la somme Infinie et l'intégration ie

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}\int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)dt}$$

2- Dans le Théoréme d'integration on peut renplacer les conditions $\forall n \in \mathbb{N}, \quad x \mapsto f_n(x)$ sont continues sur $[a,b]$ par $\forall n \in \mathbb{N}, \quad x \mapsto f_n(x)$ est Rieman Integrable sur $[a,b]$ dans ce cas la somme $S$est aussi R-Integrable

### 3. Théoréme de dérivabilité

**Théorème 0**

Soit $\sum_n f_n(x)$ une série de fonctions sur $I=[a,b]$ telle que :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad x \mapsto f_n(x)$ est de $\mathcal{C}^1$
2. $\exists x_0 \in I$ telle que la série numerique $\sum_n f_n(x_0)$ CV
3. La série $\sum_n f_n^{'}(x_0)$ converge uniformément sur tout intervalle fermé, borné $I=[a,b]$

Alors :

— a- La série $\sum_n f_n(x)$ converge uniformément sur tout intervalle fermé, borné $I=[a,b]$

— b- La somme $S(x)=\sum_n^{+\infty} f_n(x)$ est de $\mathcal{C}^1$) sur $I$ et on a

$$(\sum_n^{+\infty} f_n(x))^{'} = \sum_n^{+\infty} f_n(x)^{'}$$

C'est un permetation de somme infinie et dérivable.on dit, on derive la série termes à terme

**Preuve** : La preuve est basée sur le Théoreme de dérivabilité pour les suites de fonctios.

**Théorème 0**

**Théoreme de dérivation locale**

Soit $\sum_n f_n(x)$ une série de fonctions définie sur $I=[a,b]$ telle que :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad x \mapsto f_n(x)$ est de $\mathcal{C}^1$
2. $\exists x_0 \in [a,b]$ telle que la série numerique $\sum_n f_n(x_0)$ CV
3. La série $\sum_n f_n^{'}(x_0)$ converge uniformément sur tout sous segment $[c,d]$ de $[a,b]$

Alors :

— a- La série $\sum_n f_n(x)$ converge uniformément sur $[c,d]$ de $[a,b]$

— b- La somme $S(x)=\sum_n^{+\infty} f_n(x)$ est de $\mathcal{C}^1$) sur $[c,d]$ de $[a,b]$et on a

$$(\sum_n^{+\infty} f_n(x))^{'} = \sum_n^{+\infty} f_n(x)^{'}$$

**Théorème 0**

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définie sur un intervalle $J$ :
On suppose que

1. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad x \mapsto f_n(x)$ est de $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $J$ :
2. $\exists x_0 \in J$ telle que la série numerique $\sum_n f_n(x_0)$ CV
3. La suite de fonctions $(f_n^{'}(x))_n$ converge uniformément sur tout segment $[a,b]$ de $J$

Alors :

— a-$(f_n(x))_n$ converge uniformément sur tout segment $[a,b]$ de $J$

— b- Sa somme $S(x) = \sum_n^{+\infty} f_n(x)$ est de $\mathcal{C}^1$) sur $J$ et on a

$$(\sum_n^{+\infty} f_n(x))^{'} = \sum_n^{+\infty} f_n(x)^{'}$$

**Rq** : la preuve est basé sur le Théoreme de dérivation pour les suites de fonctions.

**Théorème 0**

**Etude d'une somme d'une série de fonctions aux bornes d'un intervalle ouvert.**

Soit $J$ un intervalle de $\mathbb{R}$, ouvert en au moins une de ses extrimites notée $a$ ($a = +\infty$, ou non)
Soit $\sum_n f_n(x)$ une série de fonctions définie sur $J$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que :

1. La série $\sum_n f_n(x)$ converge uniformément sur $J$ :
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}, \quad x \mapsto f_n(x)$ admet une limitte $b_n$ en $a$ , c.à. d.

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = b_n$$

3. La série $\sum_n b_n$ CV

Alors :

la somme de la série $S(x) = \sum_n^{+\infty} f_n(x)$ admet $\sum_n b_n$ comme limite en $a$

c.à. d.

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_n^{+\infty} f_n(x) = \sum_n^{+\infty} \lim_{n \to +\infty} f_n(x)$$

□